令和３年度弁理士試験論文式筆記試験問題

［基礎物理学］

１　図１のように、質量mの質点Ｐがxy平面内にあり、

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

なるポテンシャルの下で運動している。ただし、kは正の定数である。ここで、座標原点Ｏから質点Ｐまでの距離をrとし、線分ＯＰがx軸となす角をθとする。以下の問いに答えよ。

【３５点】

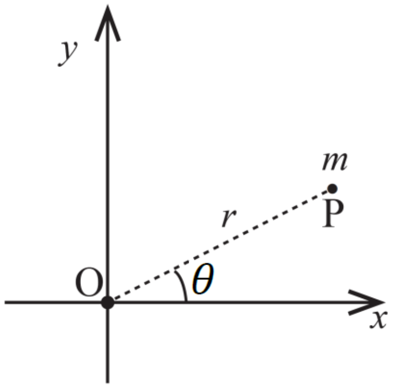

図１

(1)　質点Ｐの角運動量をLとするとき、θの時間微分$\dot{\theta}$を、m、r、Lを用いて表せ。

(2)　質点Ｐの運動エネルギーをm、r、$\dot{r}$、Lを用いて表せ。ただし、$\dot{r}$はrの時間微分を表す。

(3)　rの２階時間微分$\ddot{r}$は、$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U(r)$の形に書くことができる。$U(r)$を$m$、$r$、$L$、$k$を用いて表せ。

(4)　$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r)$が一定であることを示せ。

質点Ｐの運動の初期条件を$r = R$、$\theta = 0$、$\dot{r} = 0$、$\dot{\theta} = \omega$とする。その後の運動について、以下の問いに答えよ。

(5)　質点Ｐが等速円運動する場合に、その軌道半径Rをm、k、ωを用いて表せ。

(6)　質点Ｐが無限遠方へ遠ざかるための条件を、R、m、k、ωを用いて表せ。

２　質量M、半径Rの一様密度の剛体球が、図２(a)のように、水平な床の上を転がっている。剛体球の中心は常にこの紙面内を運動しており、剛体球の中心を通る軸周りの慣性モーメントは$\frac{2}{5}MR^2$で与えられる。以下の問いに答えよ。

【３０点】

はじめに、この剛体球が、一定の重心速度Vで、滑らずに転がっている場合を考える。

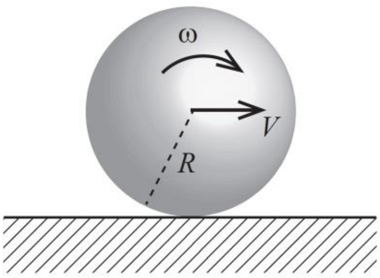

図２(a)

(1)　剛体球の回転角速度ωを求めよ。

(2)　このときの剛体球の運動エネルギーを求めよ。

この状態にあった剛体球に、図２(b)のように、撃力Fを紙面内、水平方向に高さ$h(> R)$のところで加えた。その直後の剛体球の運動について、以下の問いに答えよ。

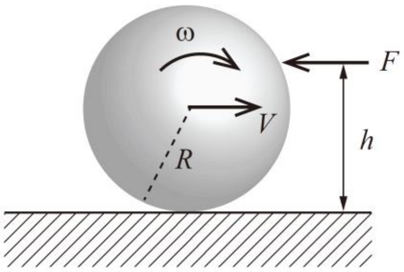

図２(b)

(3)　剛体球の回転角速度が 0 になる場合、剛体球に作用した力積を求めよ。

(4)　剛体球の回転角速度と重心速度がともに 0 になる場合、高さhを求めよ。

３　図３のように、質量mの質点が、片側が固定されたばね（ばね定数k）につけられ、x軸に平行に運動している。ここで、x軸は水平方向にあり、ばねの質量は無視できるものとする。時刻$t=0$において、ばねは自然長にあり、質点が初速度$V(>0)$を与えられ運動を始めた。時刻tにおける、質点の位置、速度、加速度を、それぞれ、$x(t)$、$\dot{x}(t)$、$\ddot{x}(t)$とする。ただし、ばねが自然長のときの質点の位置を原点Oとし、自然長からのばねの伸びは$x(t)$と一致している。質点には速度に比例する抵抗力（抵抗係数$\gamma(>0)$）が働いているものとして、以下の問いに答えよ。

【３５点】

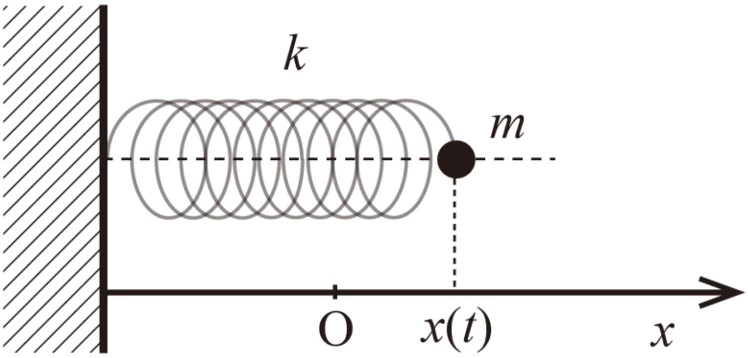

図３

(1)　この質点の従う運動方程式を表せ。

(2)　この系の全エネルギーを$E(t)$とするとき、$E(t)$の時間変化率$\dot{E}(t)$が$\dot{E}(t)=-\gamma\dot{x}^2(t)$と表されることを示せ。

この質点の位置の時間変化が、

$$x(t)=x_0\,e^{-\Gamma t}\sin\omega t$$

のように表されるとする。ただし、x_0、Γ、ωは、正の定数である。

(3)　Γをk、m、γの中から適切な文字を用いて表せ。

(4)　ωをk、m、γの中から適切な文字を用いて表せ。

(5)　質点の運動エネルギーが０となるような任意の時刻$t(>0)$において、$E(t)/E(0)$を、k、m、γ、tの中から、適切な文字を用いて表せ。