令和５年度弁理士試験論文式筆記試験問題

［基礎物理学］

1　図１のようになめらかな円錐面が、中心軸を鉛直に、原点Ｏと一致する頂点を下にして置かれている。質量mの質点が円錐面上を摩擦なしで運動している。面の厚みは考えない。頂点において円錐面と中心軸のなす角度をθ、重力加速度の大きさをgとし、以下の問いに答えよ。

【３５点】

(1) 質点の位置を(x, y, z)とする。原点と点$(x, y, 0)$を結ぶ線分がx軸となす角をφとし、この線分の長さをrとする。(x, y, z)をr、φ、θを用いて表せ。

(2) 質点の速度のx、y、z成分$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$をr、φ、$\dot{r}$、$\dot{\varphi}$、θのうち必要なものを用いて表せ。ただし、$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$、$\dot{r}$、$\dot{\varphi}$は、それぞれx、y、z、r、φの時間微分である。

(3) この質点のラグランジアンをm、g、θ、r、φ、$\dot{r}$、$\dot{\varphi}$のうち必要なものを用いて表せ。

(4) この質点が従う運動方程式を求めよ。

(5) 円錐面上の点$(x, y, z) = (x_0, 0, z_0)$にある質点に初速度$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, v_0, 0)$を与えた。その後の運動が等速円運動となるための条件を求めよ。

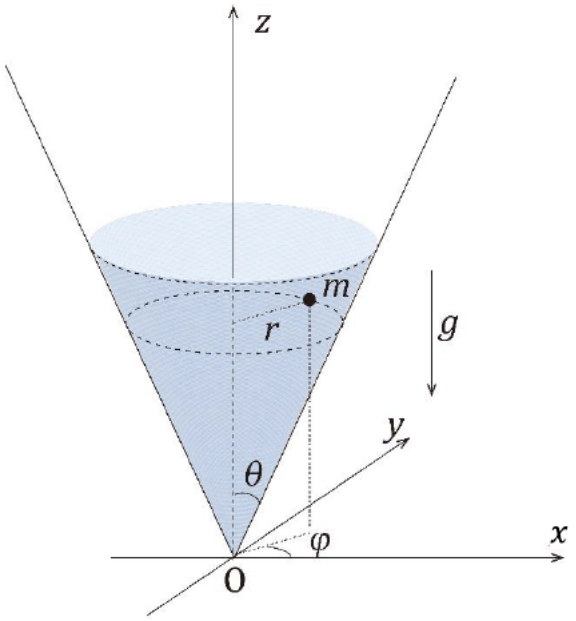

図 1

2　図２のように、質量mの質点が取り付けられた単振り子（糸の長さℓ）の支点がx軸上を振幅aおよび振動数ω_0で振動しており、時刻tにおける支点の位置は$x_0(t) = a\sin\omega_0 t$と表される。振り子の支点と質点を結ぶ線分が、鉛直方向となす角をθとし、重力加速度の大きさをgとする。振り子の糸のたるみ、のび、及び重さは無視できるものとする。質点は常に紙面内を運動しているものとし、以下の問いに答えよ。

【３５点】

(1) 時刻tにおける質点の位置を(x, y)とする。糸の張力をSとし、xとyに関する運動方程式を求めよ。

(2) xとyをℓ、θ、$x_0(t)$のうち必要なものを用いて表せ。

(3) θが微小量($|\theta| \ll 1$)である場合に、(1)の運動方程式をθに関する運動方程式に書き直せ。その際、$\sin\theta \fallingdotseq \theta$あるいは$\cos\theta \fallingdotseq 1$としてよい。ただし、$S$を用いてはならない。

(4) $\theta(t) = \theta_0\sin\omega_0 t$が(3)の運動方程式の解であるとき、$\theta_0$を求めよ。

(5) $t = 0$で、$\theta = 0$、$\dot{\theta} = 2\theta_0\omega_0$の初期条件のもとに、(3)の運動方程式の解が

$$\theta(t) = A\sin(\Omega t + \alpha) + \theta_0\sin\omega_0 t$$

のように表されるとする。このとき、A、Ω、αをm、ℓ、a、ω_0、gのうち必要なものを用いて表せ。ただし、$\dot{\theta}$はθの時間微分である。

(6) (5)において、$a \ll \ell$の場合に、θが微小量($|\theta| \ll 1$)にとどまる条件を求めよ。

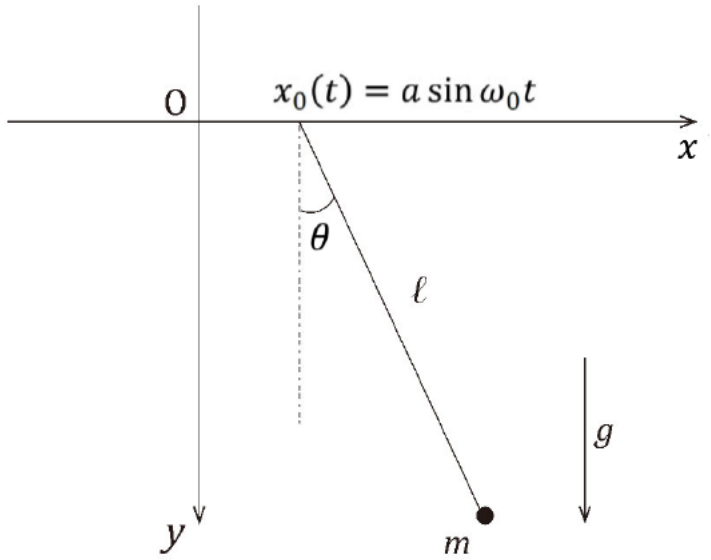

図２

3　図３のように、半径Rの一様な円板に糸を巻き付ける。糸の一端は円板に固定されており、もう一端は上壁に固定されている。最初に糸は鉛直に引かれ、円板は静止している。時刻$t = 0$で、この状態にある円板を静かに離すと、巻き付いた糸が滑らずにほどけながら円板が落下してゆく。円板の質量をM、重力加速度の大きさをgとし、糸の重さは無視できるものとする。円板は常に紙面内を運動しているものとし、以下の問いに答えよ。

【３０点】

(1) 円板の重心G回りの慣性モーメントを求めよ。

(2) 円板の重心Gの落下速度をV、円板の回転の角速度をωとする。Vとωの関係を表せ。

(3) 糸の張力をSとする。円板の重心の運動方程式、および円板の重心G回りの回転の運動方程式を、それぞれSを含む式として表せ。

(4) 糸の張力をR、M、gのうち必要なものを用いて表せ。

(5) 時刻tにおける、円板の重心Gの落下速度VをR、M、g、tのうち必要なものを用いて表せ。

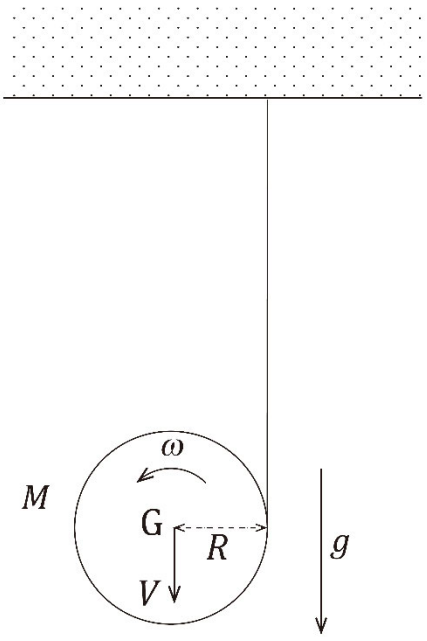

図３