平成２３年度弁理士試験論文式筆記試験問題

［基礎物理学］

１．図１のように、２つの振り子ＡとＢ（それぞれ糸の長さℓ_Aとℓ_B、おもりの質量m_Aとm_B）がバネ（バネ定数k）でつながれている。２つの振り子が共に最下点で静止しているときに、バネが水平に自然長をとるようになっている。振り子は図１の紙面内でのみ振動するとする。時刻tにおいて２つの振り子が振れる角度を、右に振れるのを正にとってそれぞれ$\theta_A(t)$と$\theta_B(t)$とする。振り子の振幅は十分小さいものとし、$\cos\theta_A \cong 1-\frac{1}{2}\theta_A{}^2$、$\cos\theta_B \cong 1-\frac{1}{2}\theta_B{}^2$ とする。バネの質量は無視する。重力加速度をgとする。

【３０点】

(1)　２つの振り子とバネからなる系のラグランジアンを、$\theta_A(t)$、$\theta_B(t)$、$\dot{\theta}_A(t)$、$\dot{\theta}_B(t)$などを用いて書き下せ。ただし、$\dot{\theta}_A(t)$と$\dot{\theta}_B(t)$はそれぞれ$\theta_A(t)$と$\theta_B(t)$の時間微分を表す。

(2)　２つの振り子それぞれの運動方程式を$\theta_A(t)$、$\theta_B(t)$、$\ddot{\theta}_A(t)$、$\ddot{\theta}_B(t)$などを用いて書き下せ。ただし、$\ddot{\theta}_A(t)$と$\ddot{\theta}_B(t)$はそれぞれ$\dot{\theta}_A(t)$と$\dot{\theta}_B(t)$の時間微分を表す。

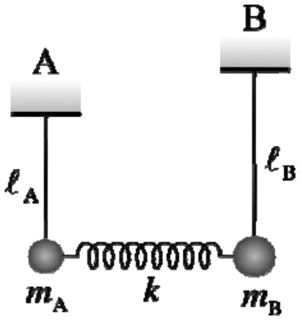

図１

（次頁に続く）

以下では、２つの振り子の糸の長さℓ_{A}とℓ_{B}、質量m_{A}とm_{B}がいずれも等しい場合を考え、$m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}} = m$、$\ell_{\mathrm{A}} = \ell_{\mathrm{B}} = \ell$とする。

(3)　２つの振り子が共に最下点で静止している状態で、時刻$t = 0$において振り子 B に速度Vを与えた。２つの振り子それぞれの運動$\theta_{\mathrm{A}}(t)$と$\theta_{\mathrm{B}}(t)$を求めよ。なお、解答に際しては２つの定数

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}}$$

を用いよ。

(4)　定数g、ℓ、k、mが$4\omega_1 = \omega_2$を満たすとき、振り子 B が初めて最下点で静止する時刻を求めよ。解答に際してはω_1を用いよ。

２．水平面上の原点に棒（長さr）の一端が固定され、そこを中心に他端に固定された質点（質量m）が回転できるようになっている。棒の質量は無視する。
質点の運動を２次元極座標で考える。２次元極座標は図２に示すように定義される。棒のx軸からの回転角を$\varphi(t)$とする。時刻tにおける質点の位置を始点として、原点から遠ざかる向きの単位ベクトルを$\vec{e}_r(t)$とし、それと直交して、原点を反時計回りに回る向きの単位ベクトルを$\vec{e}_\varphi(t)$とする。

【４０点】

(1)　極座標の単位ベクトル$\vec{e}_r(t)$と$\vec{e}_\varphi(t)$それぞれのx成分とy成分を求めよ。

(2)　$\vec{e}_r(t)$と$\vec{e}_\varphi(t)$それぞれの時間微分$\dot{\vec{e}}_r(t)$と$\dot{\vec{e}}_\varphi(t)$が

$$\dot{\vec{e}}_r(t) = \dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t)$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi(t) = -\dot{\varphi}(t)\vec{e}_r(t)$$

となることを示せ。ただし$\dot{\varphi}(t)$は$\varphi(t)$の時間微分を表す。

(3)　質点の位置ベクトル$\vec{r}(t)$は、$\vec{e}_r(t)$と同じ向きで長さがrなので、$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r(t)$と表される。質点の速度ベクトル（位置ベクトルの時間微分）$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$と加速度ベクトル（速度ベクトルの時間微分）$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$それぞれが

$$\vec{v}(t) = r\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t)$$
$$\vec{a}(t) = -r\dot{\varphi}(t)^2\vec{e}_r(t) + r\ddot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t)$$

となることを示せ。ただし$\ddot{\varphi}(t)$は$\dot{\varphi}(t)$の時間微分を表す。

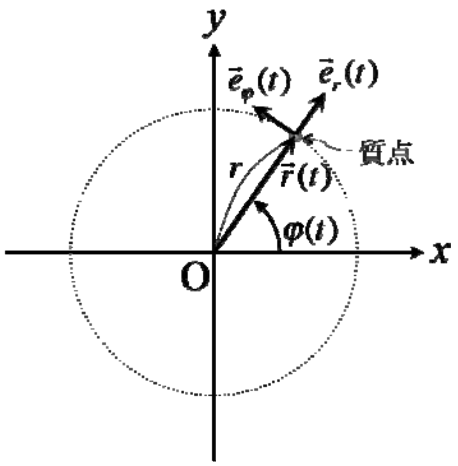

図２

（次頁に続く）

質点には、棒からの張力と空気からの抵抗力が働くとする。まず、棒からの張力は必ず$\vec{e}_r(t)$方向に働くはずなので$F(t)\vec{e}_r(t)$とおく。また、空気からの抵抗力は速度に比例する力$-b\vec{v}(t)$（bは正の定数）とする。以下ではbの代わりに$\gamma = b/m$という定数を用いよ。

(4)　質点の運動方程式を$\vec{e}_r(t)$方向と$\vec{e}_\varphi(t)$方向それぞれで書き下し、$F(t)$を$\dot{\varphi}(t)$を使って表せ。この棒からの張力は、円運動において一般に何と呼ばれるか。

(5)　質点の角運動量$L(t)$を$\dot{\varphi}(t)$を使って書き下せ。

(6)　角運動量$L(t)$の時間微分を考えることにより、$L(t)$の満たす微分方程式を求めよ。時刻$t=0$での角運動量の値をL_0として、$L(t)$をL_0、γ、tを用いて表せ。

３．図３のように、水平面から角度Θで傾いた台の平面上での円柱（半径R、長さℓ）の運動を考える。台の傾きの方向と円柱の中心軸は直交している。時刻$t=0$で円柱からそっと手を離したところ、円柱は台の上を滑ることなく転がり落ちた。転がり摩擦は無視する。重力加速度をgとする。

【３０点】

まず、円柱の密度は一様とし、その値をρ_0とする。

(1)　円柱の質量M_0と、中心軸周りの慣性モーメントI_0を求めよ。またI_0をM_0とRで表せ。

(2)　円柱が台の上を距離dだけ転がり落ちたときの、円柱の速さを求めよ。

次に、円柱の密度が中心軸からの距離rに依存して

$$\rho(r)=\rho_1\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$

となっているとする。

(3)　円柱の質量M_1と、中心軸周りの慣性モーメントI_1を求めよ。またI_1をM_1とRで表せ。

(4)　時刻tにおける円柱の速さを求めよ。

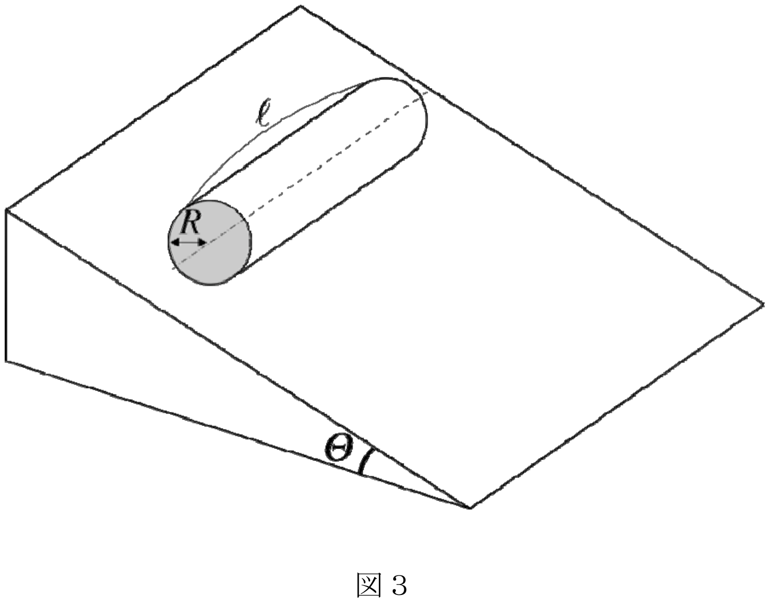

図３